Clase 15: Continuación

16 de diciembre de 2006

Notación: en lugar de escribir $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$ (donde se entiende convergencia en norma) escribiremos también

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x); \quad a < x < b \quad (f \in L^2(a;b)) \tag{1}$$

si queremos indicar explícitamente la variable x. En cambio escribir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x); \quad a < x < b \tag{2}$$

significa convergencia puntual de la serie de Fourier a la función $f \in L^2(a;b)$. En lo anterior hemos visto que para un *s.o.* completo $\{\phi_n\}$ en $L^2(a;b)$ siempre podemos escribir (1). Pero si (2)también es válido es un asunto que consideraremos más adelante.

Sea $f \in L^2(-l;l)$ y supongamos que $f(x)$ es función par (es decir $f(-x) = f(x)$ c.s. en $(-l,l)$). Tenemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]; \quad -\ell < x < \ell$$

Tenemos, según (III) de la clase anterior,
$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$, pero $f(x) sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ es impar sobre $-\ell < x < \ell$

$\Rightarrow b_n = 0; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ (si $f(x)$ par).

Además $f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ es par sobre $-\ell < x < \ell$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Similarmente es fácil ver que cuando $f(x)$ es impar, entonces,

$$a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \ (\ f(x) \text{ impar}), \text{ y } b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

Entonces,

$$\begin{cases} f(x) \ \ \text{par} \Rightarrow f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); \quad -\ell < x < \ell, \\ a_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} f(x) \ \ \text{impar} \Rightarrow f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); \quad -\ell < x < \ell, \\ b_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} f(x) sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx, \end{cases} \tag{4}$$

1. Series de Fourier de funciones periódicas.

Sea $p > 0$ arbitrario. Una $f(x)$ definida en $\mathbb{R}$ se llama periódica de período p si y sólo si $f(x+p) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (o c.s. en $\mathbb{R}$). Las $X_n(x)$ definidas por (ver la clase 14, IV)

$$X_n(x) = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}; \quad -\infty < x < \infty \ \ (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$$

son periódicas de período $p = 2l$ ya que

$X_n(x+2\ell) = e^{i\frac{n\pi}{\ell}(x+2\ell)} = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} e^{2in\pi} = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}$ ($e^{2in\pi} = 1$ para todo entero n, ver Mat. VI). Sea ahora $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ periódica de período $p = 2\ell$ y $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. Para el intervalo de período $(a; a+2\ell)$. Podemos entonces escribir

$$\begin{cases} f(x) \sim \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}; \quad -\infty < x < \infty; \\ c_n = \dfrac{1}{2\ell}\displaystyle\int_a^{a+2\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx; \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5}$$

donde la integral no depende de la selección de a. En general, se toma $a = -\ell$ y la integral es $\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}$, pero esto no es necesario. De manera similar, para $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ periódica de período $p = 2\ell$, tendremos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right]; \quad -\infty < x < \infty$$

con las fórmulas ya conocidas para los a_n, b_n. Esto es la serie de Fourier de la función periódica $f(x)$.

2. Convergencia puntual.

El problema de la convergencia puntual es importante para las aplicaciones en la física e ingeniería. Por ejemplo, en el problema de la conducción de calor considerado en la Clase 11, encontramos la solución

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\lambda_n t} sen\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); \;\; 0 \leq x \leq t, \;\; t \geq 0$$

Una solución en esta forma (como serie infinita) solamente tiene interés práctico si para cada $t > 0$ fijo el valor numérico de $u(x,t)$ en un punto x puede ser aproximado con cualquier precisión deseada tomando en cuenta un número suficiente de términos de la serie. Esto requiere de la convergencia puntual de la serie a $u(x,t)$ en el punto x.

El problema de la convergencia puntual es complicado. Nos restringimos aquí a mencionar sin demostración los siguientes criterios, donde supondremos que $f(x)$ es periódica:

a) Si $f(x)$ es C^1 a trozos, su serie de Fourier converge a $f(\xi)$ en los puntos ξ donde $f(x)$ es continua y converge al valor promedio $\frac{1}{2}[f(\xi^-) + f(\xi^+)]$en puntos ξ donde $f(x)$ tiene un salto (observe que en todos los casos la serie de Fourier converge al valor promedio).

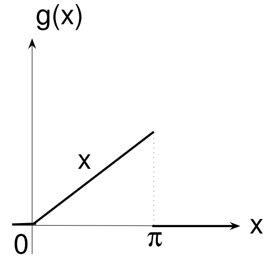
b) Si $f \in C(\mathbb{R})$ y es C' a trozos, su serie de Fourier converge absolutamente y uniformemente a $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

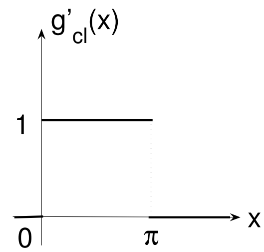
3. Algunos ejemplos.

Ejemplo 1. *(a) Sea* $f(x) = \frac{1}{2}x$*;* $0 < x < \pi$*. Hallemos la Serie de Fourier de senos de* $f(x)$ *en* $0 < \pi < x$*,*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx); \quad 0 < x < \pi$$

(aquí $l = \pi \Rightarrow \dfrac{n\pi}{l} = n$*). Tenemos* $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2} x sen(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x sen(nx)dx$ *y calculamos esta integral aplicando derivadas generalizadas*





$$g''_{cl}(x) = 0 \quad c.s. \quad en \quad \mathbb{R}$$

$\pi b_n = \langle g, \phi \rangle$ *con* $\phi(x) = sen(nx)$*,*

$\langle g''_{gen}, \phi \rangle = \langle g, \phi'' \rangle = -n^2 \langle g, \phi \rangle$ *(ya que* $\phi''(x) = -n^2 sen(nx) = -n^2 \phi(x)$*)*

$$\Rightarrow -n^2 \pi b_n = \langle g''_{gen}, \phi \rangle \tag{6}$$

Ahora $g'_{gen}(x) = -\pi\delta_{\pi}(x) + g'_{cl}(x)$*,* $g''_{gen}(x) = g''_{cl}(x) + \delta(x) - \delta_{\pi}(x) - \pi\delta'_{\pi}(x)$

$$g''_{gen}(x) = \delta(x) - \delta_{\pi}(x) - \pi\delta'_{\pi}(x)$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \quad -n^2\pi b_n = \langle \delta(x), \phi(x) \rangle - \langle \delta_{\pi}(x), \phi(x) \rangle - \pi \langle \delta'_{\pi}(x), \phi(x) \rangle =$$

$$= \phi(0) - \phi(\pi) + \pi\phi'(\pi) = \pi\phi'(\pi) = -n\pi cos(n\pi) = -n\pi(-1)^n$$

$$\Rightarrow -n^2\pi b_n = -n\pi(-1)^n \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nx); \quad 0 < x < \pi \tag{7}$$

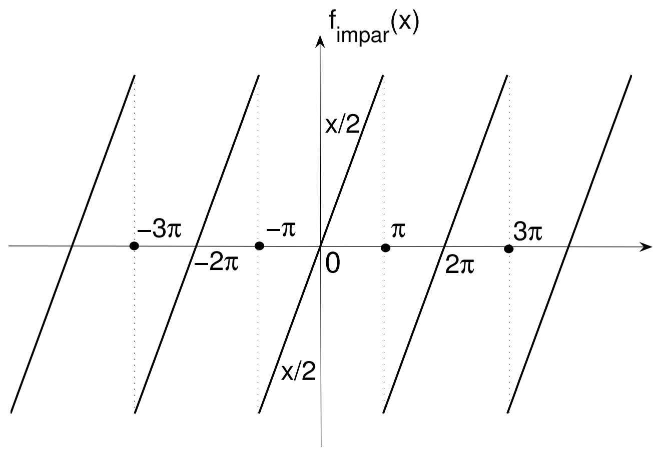
De (7) obtenemos según <u>*la igualdad de Parseval*</u>*(ver I, clase 14)*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

En la teoría de las series infinitas la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *es un ejemplo estándar de una serie convergente: se demuestra que es convergente pero no se menciona el valor de su suma. Ahora sabemos que su suma es* $\frac{\pi^2}{6}$*. Sería algo complicado obtener esta suma sin la teoría de las series de Fourier.*

(b) *Consideremos la extensión de* $f(x)$ *a una función periódica impar* $f_{impar}(x)$ *con período* 2π*. La gráfica de* $f_{impar}(x)$ *es:*



Como $f_{impar}(x)$ *es función impar, su serie de Fourier contiene únicamente términos con senos (ver (4)),*

$$f_{impar}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen(nx); \quad -\infty < x < \infty, \quad \text{con (ver 4)}$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_{impar}(x) sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)dx = b_n,$$

es decir, la misma serie (7) vale para $f_{impar}(x)$*. Como* $f_{impar}(x)$ *es* C^1 *a trozos, el criterio (a) de la convergencia puntual nos dice que la serie converge puntualmente a* $f_{impar}(x)$ *donde ésta es continua. En particular, tomando* $x = \frac{\pi}{2}$ *tenemos con (7).*

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, o$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

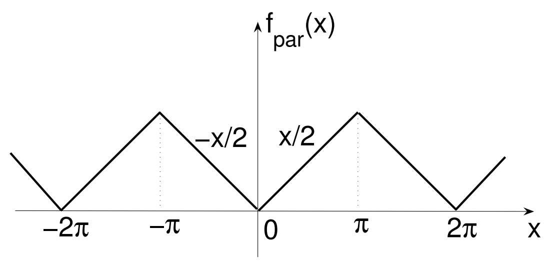
El valor promedio en cada punto de salto de $f_{impar}(x)$ es 0, por lo tanto la serie de Fourier converge a 0 en estos puntos, como indicado en la figura con un $\bullet$. En el caso particular que tenemos aquí esto es claro también directamente de la serie de Fourier misma: $sen(nx) = 0$ para $x = \pi$.

Por la convergencia puntual podemos ahora escribir (ver (2)).

$$f_{impar}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nx) \quad c.s. \text{ en } \mathbb{R}, \quad y \text{ en particular}$$

$$f(x) = \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nx); \quad 0 \leq x < 1$$

(c) *La gráfica de la extensión par y $2\pi-$periódica de $f(x)$, la cual llamamos $f_{par}(x)$, es*



Como $f_{par}(x)$ es par, su SF solamente puede tener términos cosenos y un término constante posiblemente (ver (3)). Dejamos al lector verificar que

$$f_{par}(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]; \quad -\infty < x < \infty. \tag{8}$$

Luego la igualdad de Parseval da (ver (II) Clase 14)

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

otra serie infinita junto con su suma (!!), difícilmente obtenible sin la teoría de las SF. Como $f_{par}(x)$ es C^1 a trozos y continua, el criterio (b) de la convergencia puntual nos dice que la SF de $f_{par}(x)$ converge puntualmente a $f_{par}(x)$ en todo $\mathbb{R}$, de modo que además de (8) tenemos

$$f_{par}(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]; \quad -\infty < x < \infty,$$

en particular

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]; \quad -0 \leq x \leq \pi,$$

y tomando $x = 0$ resulta

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

otra (!!) serie infinita junto con su suma.

(d) *Finalmente consideremos la SF compleja de $f_{impar}(x)$,*

$$f_{impar}(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}; \quad -\infty < x < \infty.$$

Tenemos, según (IV), Clase 14:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} dx = 0 \quad \textit{y para } n \neq 0,$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx - \frac{1}{4\pi} i \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\
&= 0 - \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = 0 - \frac{i}{4\pi} 2 \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\
&= -\frac{1}{2} i \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x}{2} \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{1}{2} i b_n = -\frac{1}{2} i \frac{(-1)^{n+1}}{n},
\end{aligned}$$

luego

$$f_{impar}(x) = \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}, \quad c.s. \quad en\ \mathbb{R}.$$

Verifique que la igualdad de Parseval da nuevamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejemplo 2.

(a) Se pide hallar el desarrollo en SF de cosenos de $f(x) = 3 - 4\cos(2x)$ *en* $0 < x < \pi$ *¡Que pregunta tan fácil!:* $3 - 4\cos(2x)$ *<u>ya</u> es el desarrollo (la SF en este caso es una SF finita).*

(b) Sea $g(x) = \operatorname{sen}^3(x)$*;* $-\infty < x < \infty$*. Se pide hallar la SF de* $g(x)$*. Como* $g(x)$ *es impar la SF contiene únicamente senos. Hallar los coeficientes de Fourier con la fórmula integral no es la manera más eficiente en este caso. Sea* $z = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$*, entonces según la formula de De Moivre*

$$z^3 = \cos(3x) + i\operatorname{sen}(3x) \quad \Longrightarrow \quad \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}^2(x) = \cos(3x) + i\operatorname{sen}(3x),$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(3x) = 3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x) = 3(1 - \operatorname{sen}^2(x))\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x)$$

$$\Longrightarrow \quad sen^3(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x)$$

es la SF deseada. Además vemos que

$$cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$$

es el desarrollo en SF de $cos^3(x)$*.*

Para más ejemplos ver la guía del Profesor P. F. Hummelgens.